Les Routes du Ciel, Notre Métier

Cycle PA — Session d'août 2015

CONCOURS D'ENTREE A L'ERSI

Epreuve de Mathématiques

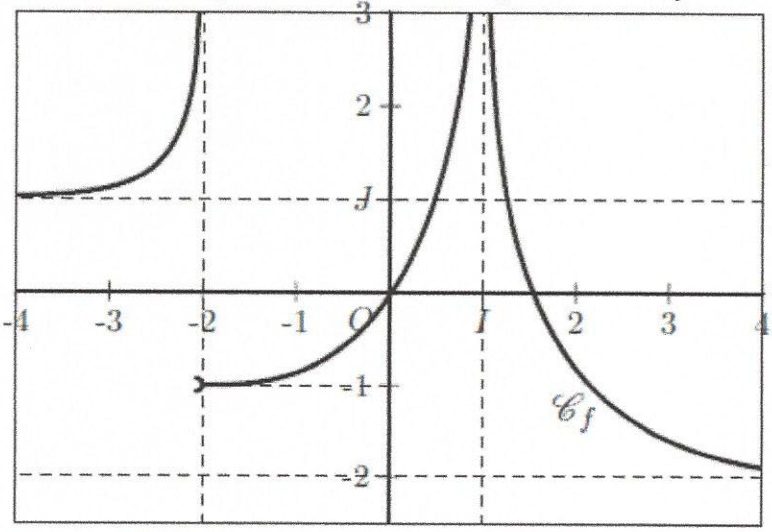
ERSI — Ecole d'Excellence

Durée : 2h — **Documents Non autorisés**

Epreuve B.

Exercice I (3pts)

Ci-dessous est représentée la courbe représentative Cf de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe Cf ont été représentées en pointillés.
Dresser le tableau de variation complet de cette fonction.

Exercice II (2+3+1+1=7pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie :

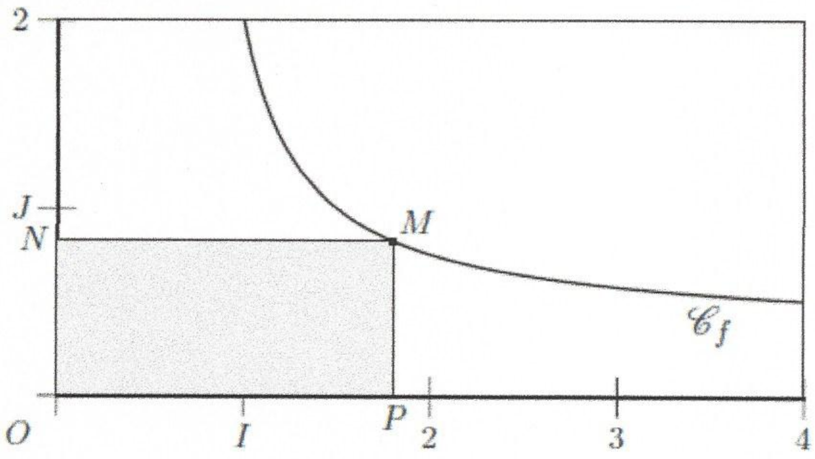
$u_0 = 4$; $u_{n+1} = \frac{-u_n+6}{u_n-2}$ pour tout entier naturel n.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation : $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-3}$ pour tout entier naturel n.
   a) Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
   b) Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{1}{4}$
   c) En déduire la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la formule explicite déterminant le terme de rang n en fonction de n.
3) Déterminer l'expression du terme u_n en fonction du terme v_n.
4) En déduire la formule explicite définissant les termes de (u_n) en fonction de n.

Exercice III (1,5+1+1,5+1=5pts)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ par la relation : $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$

La représentation Cf est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe Cf et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.
On note $A(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M.
Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $A(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $A(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de A.
3. Etablir le sens de variation de la fonction A.
4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.