Les Routes du Ciel, Notre Métier	Cycle TS Session d'août 2015 **CONCOURS D'ENTREE A L'ERSI** **Epreuve de Mathématiques** **Durée : 2h** Epreuve A. **Documents Non autorisés**	Ecole d'Excellence

Exercice 1 : (3pts)

On considère l'intégrale I = $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ et la fonction définie sur [0 ; 1] par :

f (x) = ln (x + $\sqrt{x^2 + 2}$), où ln désigne le logarithme népérien.

1- Calculer la dérivée de la fonction u : x $\mapsto$ $\sqrt{x^2 + 2}$ (1pt)

2- En déduire la dérivée f ' de f. (1pt)

3- Calculer la valeur de l'intégrale I. (1pt)

Exercice 2 : (3pts)

On considère l'application f de C – {3} dans C qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe f (z) = $\frac{1-3z}{3-z}$. On pose z = x + iy et f (z) = U + iV, avec x, y, U et V nombres réels.

1- Calculer U et V en fonction de x et y. (1pt)

2- A quelles conditions nécessaires et suffisantes le nombre f (z) est-il :

a) Réel ? (1pt)

b) Imaginaire pur ? (1pt)

Exercice 3 : (6pts)

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$

1- a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{15}{2}$. (1,5pts)

b) Que peut-on en déduire ? (0,5pt)

2-On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{15}{2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison. (1pt)

b) Exprimer pour tout entier naturel n, le terme v_n, puis u_n en fonction de n. (1,5pt)

c) En déduire la limite de la suite (u_n). (1pt)

Exercice 4 : (1+1,5+1,5=4pts)

On considère la suite de nombres réels (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et la relation suivante :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$$

Soit θ_n l'argument principal de z_n (i.e. $\theta_n \in]-\pi, \pi]$).

1) Montrer que $z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2) Donner une relation de récurrence entre θ_{n+1} et θ_n
3) Exprimer $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$ et θ_n

Exercice 5 : (4pts)

On considère quatre jetons numérotés de 1 à 4.

1- Combien y a-t-il d'alignements possibles des quatre jetons ? (1pt)

2- Combien y a-t-il d'alignements possibles des quatre jetons commençant à gauche par 1 ? (1pt)

3- Combien peut-on obtenir de nombres pairs en alignant les quatre jetons ? (1pt)

4- On choisit deux jetons parmi les quatre. Combien y a-t-il de choix et de façons de les disposer ? (1pt)