	Cycle TS Session d'août 2015	
Les Routes du Ciel, Notre Métier	**CONCOURS D'ENTREE A L'ERSI** **Epreuve de Mathématiques**	ERSI Ecole d'Excellence
	Durée : 2h Epreuve B. **Documents Non autorisés**	

Exercice I (1,5+3+1,5=6pts)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites
   a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C ?
2. Etude des variations de la fonction f.
   a) Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(2x+1)$$
   b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$
   c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.
3. Tracer la courbe C dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Exercice II (1+2+1=4pts)

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par $z = \frac{1-i}{1+i}$
2. a. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - i$; $z_1 = 1 + i$
   b. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe z.
3. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe z_3 définie par $z_3 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice III (1× 5 =5pts)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier naturel, on a l'encadrement:
$$0 \leq v_n - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
4. Etablir que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. En déduire que ces deux suites convergent vers un même nombre ℓ ; déterminer la valeur de ℓ.

Exercice IV (1+2+1=4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

a) Montrer que pour tout $x > 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

b) Calculer $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}dx$ et $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x}dx$

c) En déduire un encadrement de $K = \int_2^4 f(x)dx$